Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 2

Vendredi 8 novembre

*Les calculatrices **ne** sont **pas** autorisées.*
Le sujet comporte 4 pages et est constitué de deux exercices indépendants que l'on rédigera sur deux copies distinctes.

Exercice 1. Série harmonique (*CCINP 2024*)
Dans cet exercice, on s'intéresse à la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$.
Le but est de démontrer que celle-ci est une série divergente.
Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Q1. Énoncer la définition de la convergence pour une série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ de nombres réels ou complexes.

Q2. Pour quelle(s) valeur(s) du réel α, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est-elle convergente ?

Q3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$.

Q4. En déduire que

$$\forall n \geqslant 1,\ \mathrm{e}^{H_n} \geqslant \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right),$$

puis, en remarquant l'égalité $1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$, que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $e^{H_n} \geqslant n + 1$.

Q5. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} e^{H_n} = +\infty$.
En déduire la divergence de la série harmonique.

Exercice 2. Une suite et une série (*d'après CCINP 2019*)
Dans cet exercice, on étudie l'intégrale $u_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$ où $n \in \mathbb{N}$.

Partie I - Généralités sur la suite $(\mathbf{u_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$

Q6. Calculer u_0, u_1 et u_2.

Q7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

Q8. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q9. À l'aide d'une intégration par parties, établir que $(n+1)u_{n+1} = nu_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$.
Indication : on écrira $\cos^{n+1}(t) = \cos(t) \times \cos^n(t)$.

Q10. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = (n+1)u_{n+1}u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
En utilisant la question précédente, vérifier que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et donner sa valeur.

Q11. En déduire que $(n+1)u_{n+1}^2 \leqslant 2\pi \leqslant (n+1)u_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q12. Donner, à partir de la question précédente, un encadrement de u_n en fonction de n pour $n \geqslant 1$.

Q13. En déduire que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2\pi}{n}}$.

Partie II - Étude d'une série

Dans cette partie, on étudie la série $\sum u_n x^n$ où x est un réel fixé.

On rappelle qu'on a établi dans la partie précédente que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2\pi}{n}}$.

Q14. Cas $x = 1$: la série $\sum u_n$ converge-t-elle ?

Q15. Cas $|x| < 1$: montrer que, pour tout $x \in \,]-1\,;1[$, la série $\sum u_n x^n$ est absolument convergente.

Pour la suite, on note $S(x)$ la somme de cette série lorsqu'elle est convergente, *i.e.*

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \quad \text{pour tout } x \in \,]-1\,;1[.$$

Q16. Soient q un réel et n un entier naturel non nul. Rappeler, sans preuve, la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q^k$ pour $q \neq 1$. Que vaut cette somme si $q = 1$?

Q17. Établir la formule suivante pour tout nombre entier naturel non nul n et tout nombre réel $x \in \,]-1\,;1[$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos(t)} - x^n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^n(t)}{1 - x\cos(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Q18. En déduire l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos(t)}$ pour tout $|x| < 1$.

Q19. Soit $t \in \,]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$. On note $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

Montrer que $\cos(t) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ et $\sin(t) = \dfrac{2u}{1+u^2}$.

Q20. Montrer que $S(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2}{(1-x)+(1+x)u^2}\,\mathrm{d}u$ pour $|x| < 1$ à l'aide du changement de variable $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

Q21. En déduire l'expression de $S(x)$ pour $|x| < 1$.

Exercice 3. Autour des matrices nilpotentes (*d'après EPITA 2024*)
Dans ce problème on s'intéresse aux matrices nilpotentes. Dans une première partie on étudie un exemple, dans la seconde on démontre différentes propriétés concernant les matrices nilpotentes, et enfin, dans une dernière partie on s'intéresse à l'exponentielle d'une matrice nilpotente.

On définit les notations suivantes :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$ et à coefficients dans $\mathbb{R}$.
- $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- On identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ avec les matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Définitions : Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Lorsqu'il existe un entier naturel p tel que $N^p = 0_n$, on dit que la matrice N est **nilpotente**. Le plus petit entier p vérifiant $N^p = 0_n$ est appelé **indice de nilpotence** de la matrice N. On note $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie I - Étude d'une matrice nilpotente

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Q22. La matrice A est-elle inversible ?

Q23. Montrer que A est nilpotente. On précisera son indice de nilpotence.

Q24. Montrer que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}(X_1)$ où X_1 est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ à préciser.

Q25. Soit $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que $AX_2 \in \mathrm{Ker}(A)$.

Q26. Déterminer un vecteur $X_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que $AX_3 = X_2$.

Q27. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \big(X_1, X_2, X_3\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Q28. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.
Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Partie II - Quelques propriétés des matrices nilpotentes

Inversibilité

Q29. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier que si M est nilpotente alors M n'est pas inversible.

Q30. Soient $n \geqslant 2$ et $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. Montrer que J_n n'est pas inversible et qu'elle n'est pas nilpotente.

Indice de nilpotence

Q31. Soit $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ d'indice de nilpotence p. Justifier qu'il existe $X \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $M^{p-1}X \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, puis montrer alors que la famille $\big(X, MX, \dots, M^{p-1}X\big)$ est libre.

Q32. En déduire que l'indice de nilpotence vérifie l'inégalité $p \leqslant n$.

Q33. En déduire que pour toute $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$, $M^n = 0_n$.

Q34. Montrer que si $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ alors la matrice $M = \mathrm{I}_n - N$ est inversible et $M^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} N^k$.

Stabilité par somme et produit

Q35. Vérifier que $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ sont des éléments de $\mathcal{N}_2(\mathbb{R})$. L'ensemble $\mathcal{N}_2(\mathbb{R})$ est-il un espace vectoriel ?

Q36. Soient M et N deux matrices de $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ qui commutent. Montrer que $MN \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$.

Q37. Soient M et N deux matrices de $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ qui commutent. Montrer que $M + N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$.

Partie III - Exponentielle de matrices nilpotentes

Pour $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$, on définit l'exponentielle de M comme la matrice $\exp(M) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k$.

Q38. Vérifier que $\exp(0_n) = \mathrm{I}_n$.

Q39. Soit $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Justifier que $T \in \mathcal{N}_3(\mathbb{R})$ et montrer que $\exp(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Q40. Soit $k \in \mathbb{N}$. On considère des matrices $M_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définies pour tout entier $i \in [\![0\,;k]\!]$ et tout entier $j \in [\![0\,;k]\!]$. Montrer que

$$\sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} M_{i,j} = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k-i} M_{i,j} + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k-i+1}^{k} M_{i,j} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k-i} M_{i,j} = \sum_{s=0}^{k} \sum_{i=0}^{s} M_{i,s-i}.$$

Q41. Soient A et B deux matrices nilpotentes qui commutent.
En remarquant que $\exp(A)\exp(B) = \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{i!} A^i \right) \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{2n} \frac{1}{j!} B^j \right)$ et en utilisant la question précédente, montrer que $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.

Q42. En déduire que si $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ alors $\exp(N) \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ et déterminer son inverse.

Q43. On définit $E = \{\exp(M) \mid M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})\}$. L'ensemble E est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Q44. On dit qu'une matrice est **unipotente** si elle s'écrit comme la somme de la matrice identité et d'une matrice nilpotente.
Montrer que l'exponentielle d'une matrice nilpotente est unipotente.